8 клас

1. Який з дробів $\frac{2013}{2014}$ чи $\frac{2014}{2015}$ більший?

Відповідь: $\frac{2014}{2015}$.

Вказівки до розв'язку.

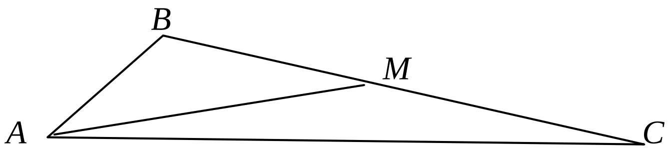
$2014^2 - 1 < 2014^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2014-1)(2014+1) < 2014^2 \quad \Leftrightarrow$ $2013 \cdot 2015 < 2014^2 \quad \Leftrightarrow$ поділивши обидві частини нерівності на $2014 \cdot 2015$ одержуємо $\frac{2013 \cdot 2015}{2014 \cdot 2015} < \frac{2014^2}{2014 \cdot 2015} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2013}{2014} < \frac{2014}{2015}$.

2. Дано трикутник ABC. Точка M лежить на стороні BC. Відомо, що $AB = BM$ та $AM = MC$, $\angle ABC = 100°$. Знайти інші кути трикутника.

Відповідь: $\angle BCA = 20°$, $\angle CAB = 60°$

Вказівки до розв'язку.

Оскільки $AB = BM$, то трикутник ABM рівнобедрений, тому $\angle BAM = \angle BMA = 40°$. Трикутник AMC також рівнобедрений, бо $AM = MC$. $\angle BMA$ є зовнішнім кутом трикутника AMC, тому $\angle MAC + \angle MCA = \angle BMA = 40°$. Але $\angle MAC = \angle MCA$, тому $\angle MAC = \angle MCA = 20°$. Отже, $\angle BCA = \angle MCA = 20°$,



$\angle CAB = \angle CAM + \angle BAM = 20° + 40° = 60°$.

3. Є дві посудини, що містять 4 кг і 6 кг розчинів кислоти різних концентрацій. Якщо їх злити разом, то вийде розчин, що містить 35% кислоти. Якщо ж злити рівні маси цих розчинів, то вийде розчин, що містить 36% кислоти. Скільки кілограмів чистої кислоти міститься у кожній посудині?

Відповідь: 1,64 кг, 1,86 кг.

Вказівки до розв'язку.

Нехай у першій посудині міститься x кг кислоти, а у другій y кг. Тоді $\frac{x+y}{10} = 0{,}35$. Якщо взяти по a кг кожного розчину, то $\frac{\frac{ax}{4} + \frac{ay}{6}}{2a} = 0{,}36$, тобто

$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=0,72$. З двох одержаних рівнянь $x+y=3,5$ та $3x+2y=8,64$ маємо $x=1,64$, $y=1,86$.

4. Розв'язати рівняння $x^2+xy+y^2-2x+2y+4=0$.

Відповідь: $x=2$, $y=-2$.

Вказівки до розв'язку.

$$x^2+xy+y^2-2x+2y+4=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-2x+2+\frac{1}{2}y^2+2y+2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)+\frac{1}{2}(x^2-4x+4)+\frac{1}{2}(y^2+4y+4)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x+y)^2+(x-2)^2+(y+2)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x+y=0 \quad \text{і} \quad x-2=0 \quad \text{і} \quad y+2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x=2,\ y=-2.$$

5. Знайти всі такі пари цілих чисел a та b, що $a(a-b)=b$.

Відповідь: $a=b=0$ або $a=-2$, $b=-4$.

Вказівки до розв'язку.

Якщо $a=0$, то $b=0$, і навпаки. Далі вважаємо, що a та b не дорівнюють нулю. Оскільки b ділиться на a, то $b=ac$. Підставляючи, одержуємо

$$a^2(1-c)=ac \quad \Leftrightarrow \quad a(1-c)=c \quad \Leftrightarrow \quad a(1-c)+1-c=1 \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)(1-c)=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$a+1=1 \ \text{ і } \ 1-c=1 \quad \text{або} \quad a+1=-1 \ \text{і} \ 1-c=-1 \Leftrightarrow$$

$a=c=0$ або $a=-2$, $c=2$, звідки і одержуємо другу відповідь $a=-2$, $b=-4$.

9 клас.

1. Порівняйте числа $a=\sqrt{34}+5$ та $c=\sqrt{54}+3$.

Відповідь: $a>c$.

Вказівки до розв'язку.

$$\sqrt{34}>4 \quad \Leftrightarrow$$
$$4\sqrt{34}>16 \quad \Leftrightarrow$$
$$38+4\sqrt{34}>54 \quad \Leftrightarrow$$
$$34+4\sqrt{34}+4>54 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{34}+2\right)^2>\left(\sqrt{54}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{34}+2>\sqrt{54} \quad \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{34}+5>\sqrt{54}+3.$$

2. Контрольну роботу виконувало менше 20 учнів. Щоб одержати позитивну оцінку потрібно було набрати не менше 65 балів. Після перевірки робіт виявилось, що середній бал усіх учнів становить 66, середній бал тих, хто одержав позитивну оцінку – 71, а тих, що негативну – 56. Учитель всім учням додав 5 балів. Після цього середній бал тих, хто мають позитивні оцінки став 75, а тих, у кого негативні – 59. Скільки учнів виконували контрольну роботу?

Відповідь: 12 учнів.

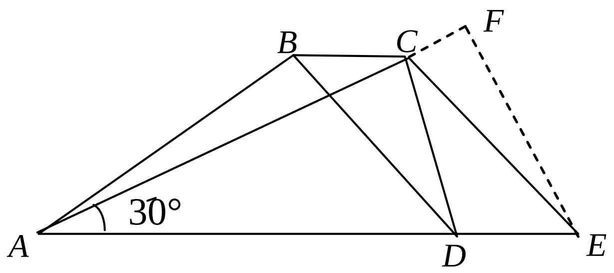
Вказівки до розв'язку.

Нехай k учнів писали роботу,
x – кількість позитивних оцінок спочатку,
y – кількість позитивних оцінок після додавання 5 балів.
Маємо рівняння

$$66k=71x+56(k-x),$$
$$71k=75x+59(k-y).$$

Після спрощення дістаємо $2k=3x$, $3k=4y$.
Отже, k ділиться на 3 і на 4. Єдине число, менше 20, що ділиться на 3 і на 4 це 12.

3. У трапеції *ABCD* (*BC* || *AD*) $\angle CAD = 30°$ і діагональ *BD* дорівнює довжині середньої лінії трапеції. Знайти кут між діагоналями *AC* і *BD*.



Відповідь: $90°$.

Вказівки до розв'язку.

На прямій *AD* відкладемо $DE = BC$. Тоді чотирикутник *BCDE* – паралелограм. Отже, $CE = BD$, тому $CE = \dfrac{AD+BC}{2} = \dfrac{AE}{2}$. Проведемо *EF* перпендикулярно до *AC*. Трикутник *AEF* – прямокутний, $EF = \dfrac{1}{2}AE$ (катет напроти кута $30°$). $EF = CE$, тоді точка *F* співпадає з *C*. Оскільки $BD \| CE$, то *BD* перпендикулярно до *AC*.

4. Довести, що якщо $a > 0$, то має місце нерівність

$$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16.$$

Вказівки до розв'язку.

Скористаємося нерівністю $a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$.

$$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} = \left(a^{40} + \frac{1}{a^{16}}\right) + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{a^{40}\frac{1}{a^{16}}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} = 2a^{12} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} =$$

$$= 2\left(a^{12} + \frac{1}{a^4}\right) + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 2 \cdot 2\sqrt{a^{12}\frac{1}{a^4}} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} = 4a^4 + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} =$$

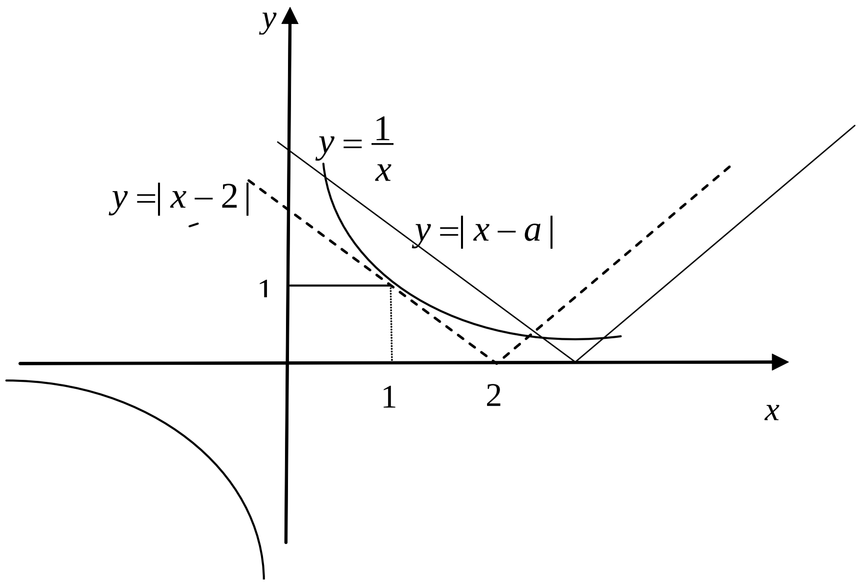
$$= 4\left(a^4 + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{8}{a} \geq 4 \cdot 2\sqrt{a^4\frac{1}{a^2}} + \frac{8}{a} = 8a + \frac{8}{a} = 8\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 8 \cdot 2\sqrt{a\frac{1}{a}} = 16.$$

Рівність має місце лише при $a = 1$.

5. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $x|x-a|=1$ має три різні корені.

Відповідь: $a \in (2, +\infty)$.

Вказівки до розв'язку. Оскільки $x=0$ не є розв'язком рівняння, то запишемо його у вигляді $|x-a|=\frac{1}{x}$. Розв'язуючи це рівняння графічно, бачимо,



що при $a=2$ графіки функцій $y=\frac{1}{x}$ та $y=|x-2|$ перетинаються у двох точках, тобто вихідне рівняння має два корені. Якщо ж збільшувати значення a, то графіки будуть перетинатися у трьох точках, а тому і дане рівняння буде мати три різні розв'язки (при $a>2$).

10 клас

1. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x+(y-3)^{2014}=z, \\ y+(z-4)^{2014}=x, \\ z+(x-5)^{2014}=y. \end{cases}$

Відповідь: $x=5$, $y=3$, $z=4$.

Вказівки до розв’язку.

Додавши три дані рівняння одержуємо

$x+y+z+(x-5)^{2014}+(y-3)^{2014}+(z-4)^{2014}=x+y+z$.

Звідси $(x-5)^{2014}+(y-3)^{2014}+(z-4)^{2014}=0$, а тому кожен з доданків у лівій частині дорівнює 0. Отже, $x=5$, $y=3$, $z=4$.

2. Покажіть, що $2014^2+2014^2\cdot 2015^2+2015^2$ можна представити у вигляді точного квадрата n^2, знайдіть це натуральне число *n*.

Відповідь: $n=2015^2-2015+1=4058211$.

Вказівки до розв’язку.

Позначимо число 2015 через *x*. Тоді число $2014=x-1$. Тоді, згідно введених позначень, даний за умовою задачі числовий вираз набуває вигляду

$(x-1)^2+(x-1)^2x^2+x^2=x^2-2x+1+x^2+((x-1)x)^2=$

$=2(x^2-x)+1+((x-1)x)^2=((x-1)x)^2+2(x-1)x+1=((x-1)x+1)^2=(x^2-x+1)^2$.

Зробимо обернену заміну та отримаємо

$2014^2+2014^2\cdot 2015^2+2015^2=(2015^2-2015+1)^2=4058211^2$.

3. Знайти всі прості числа *x* та *y* , що задовольняють рівняння $x^2-2y^2=1$.

Відповідь: $x=3$, $y=2$.

Вказівки до розв’язку.

Подамо дане рівняння $x^2-2y^2=1$ у вигляді $x^2-1=2y^2$ або

$(x-1)(x+1)=2y^2$.

Оскільки шуканими *x; y* є прості натуральні числа, то права частина останнього рівняння є парним числом. А тому і ліва частина цього рівняння повинна бути парним числом. Числа $(x-1)$ та $(x+1)$ мають однакову парність. Тому їх добуток буде парним числом лише за умови, коли $(x-1)=2m$, $m\in N$. Звідки $(x+1)=2m+2$ і рівняння набуває вигляду $2m(2m+2)=2y^2$ або $2m(m+1)=y^2$.

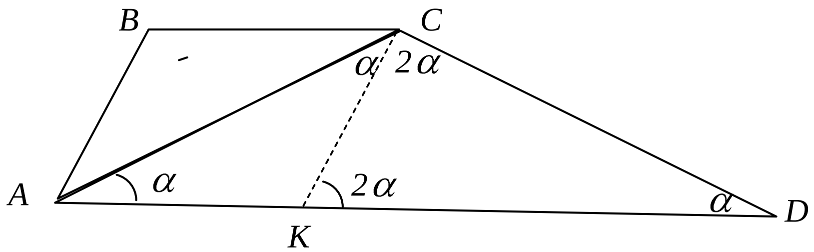
Оскільки ліва частина цього рівняння є парним числом, то і права частина цього рівняння повинна бути парним числом. Існує єдине просте число, квадрат якого є парним числом. Це – число 2. Отже, $y=2$. Підставивши $y=2$ у рівняння $(x-1)(x+1)=2y^2$, одержимо $x^2=9$. Звідки $x=3$. ($x=-3$ не є натуральним).

4. У трапеції $ABCD$ з основою AD справедливі рівності $AB=BC$, $AC=CD$, $BC+CD=AD$. Знайти кути трапеції.

Відповідь: $\angle A=72^\circ$, $\angle B=108^\circ$, $\angle C=144^\circ$, $\angle D=36^\circ$.

Вказівки до розв'язку.

Відкладемо точку K так, що $AK=BC$, тоді $ABCK$ – ромб. Позначимо



$\angle CAK=\alpha$. Тоді $\angle CAK=\angle ACK=\angle ADC=\alpha$. $\angle CKD=2\alpha$ (зовнішній кут трикутника). Із рівності $BC+CD=AD=AK+KD$ маємо $CD=KD$. Тоді $\angle KCD=2\alpha$ (як кут при основі рівнобедреного трикутника). Із трикутника KCD маємо $5\alpha=180^\circ$, тоді $\alpha=36^\circ$. Тоді $\angle A=2\alpha=72^\circ$, $\angle B=180^\circ-72^\circ=1$, $\angle C=180^\circ-36^\circ=144^\circ$ (або $\angle C=4\alpha=144^\circ$), $\angle D=\alpha=36^\circ$.

5. Знайти площу фігури, координати точок якої задовольняють нерівності

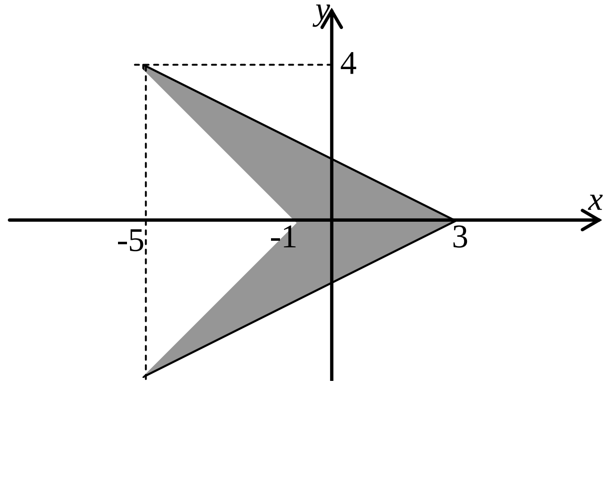
$$\begin{cases} x+2|y|-3\le 0, \\ x+|y|+1\ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: S=16.

Вказівки до розв'язку.

Задача зводиться до знаходження площі, зафарбованої на рисунку фігури.

$$S=2\left(\frac{1}{2}8\cdot 4-\frac{1}{2}4\cdot 4\right)=16.$$



11 клас

1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} [x]+\{y\}=2{,}3; \\ \{x\}+[y]=1{,}2; \end{cases}$

де $[a]$ – ціла частина числа *a* (тобто найбільше ціле число, що не перевищує *a*), $\{a\}$ – дробова частина числа *a*.

Відповідь: $x=2{,}2$, $y=1{,}3$.

Вказівки до розв'язку.

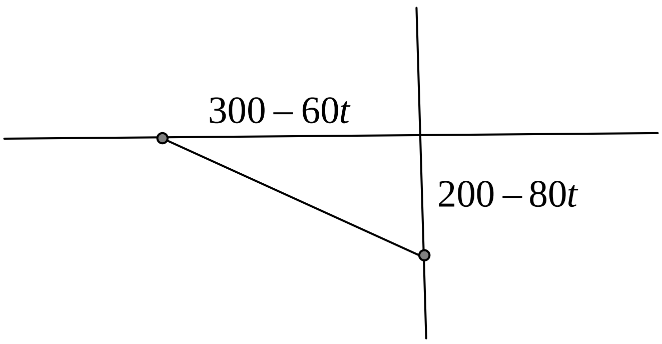
З першого рівняння випливає, що $[x]=2$ і $\{y\}=0{,}3$, а з другого рівняння одержуємо $[y]=1$ і $\{x\}=0{,}2$. Тому $x=[x]+\{x\}=2{,}2$ і $y=[y]+\{y\}=1{,}3$.

2. По взаємно перпендикулярних дорогах у напрямку до перехрестя рухаються два автомобілі зі швидкостями 60 км/год і 80 км/год. Знайти мінімальну, у процесі руху, відстань між автомобілями, якщо у початковий момент часу відстані від автомашин до перехрестя дорівнювали 300 км і 200 км відповідно.

Відповідь: 120 км.

Вказівки до розв'язку.

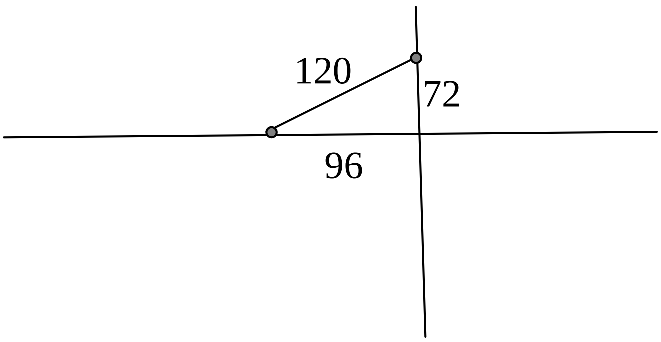
У кожний момент часу *t* відстань між автомобілями дорівнює



$S(t)=\sqrt{(300-60t)^2+(200-80t)^2}$. Таким чином задача зводиться до знаходження мінімального значення функції $S(t)$ при $t>0$.

$$S(t)=\sqrt{(300-60t)^2+(200-80t)^2}=\sqrt{20^2(15-3t)^2+(10-4t)^2}=$$
$$=20\sqrt{225-90t+9t^2+100-80t+16t^2}=20\sqrt{25t^2-170t+325}=$$
$$=20\sqrt{25t^2-2\cdot 5t\cdot 17+289+36}=20\sqrt{(5t-17)^2+36}.$$

Отже, $S(t)$ приймає найменше значення при $5t-17=0$, тобто $t=3{,}4$. І найменше значення функції дорівнює $S=20\sqrt{36}=120$ (км).



При розв'язуванні задачі можна застосувати і методи знаходження мінімального значення функції з використанням похідної.

3. Розв'язати рівняння $\mathrm{ctg}\,2^x=\mathrm{tg}\,2^x+2\,\mathrm{tg}\,2^{x+1}$.

Відповідь: $\log_2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\right),\ n=0,1,2,\ldots,\ \log_2\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\right),\ n=0,1,2,\ldots$

Вказівки до розв'язку.

Оскільки $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=2\mathrm{ctg}2\alpha$, то

$\mathrm{ctg}2^x-\mathrm{tg}2^x=2\mathrm{tg}2^{x+1},\ 2\mathrm{ctg}2^{x+1}=2\mathrm{tg}2^{x+1},\ (\mathrm{tg}2^{x+1})^2=1$. Звідси

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}2^{x+1}=1,\\ \mathrm{tg}2^{x+1}=-1,\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}2^{x+1}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n=0,1,2,\ldots,\\ 2^{x+1}=-\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m=0,1,2,\ldots,\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\log_2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\right),\ n=0,1,2,\ldots,\\ x=\log_2\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\right),\ n=0,1,2,\ldots,\end{array}\right.$$

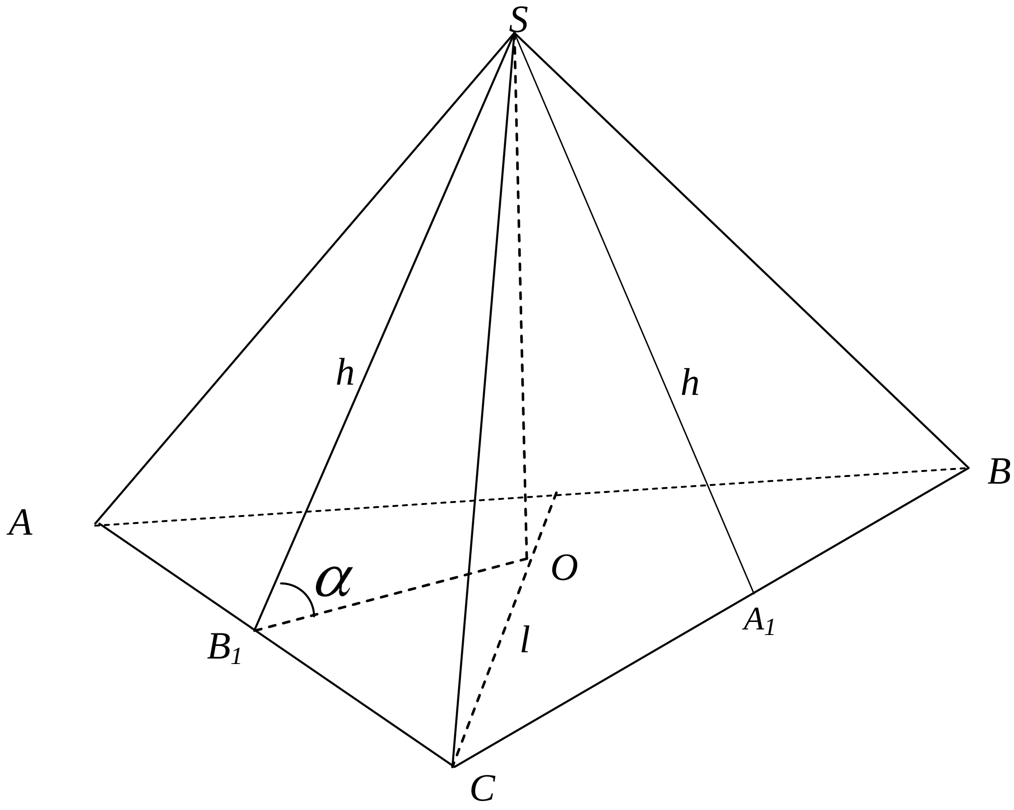
4. У трикутній піраміді бічні грані мають площі 5, 5 та 8 і нахилені до площини основи під рівними кутами. Площа основи піраміди дорівнює 9. Знайти об'єм піраміди.

Відповідь: V=6.

Вказівки до розв'язку.

Нехай кут між бічними гранями і основою дорівнює α. Спроектувавши бічні грані на основу дістанемо $9=(5+5+8)\cos\alpha$. Тоді $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=60°$. SA', SB', SC' – висоти бічних граней, SO – висота піраміди. $SO=SA'\sin\alpha=SB'\sin\alpha=SC'\sin\alpha=h\frac{\sqrt{3}}{2}$, де $SA'=SB'=SC'=h$.

Основа піраміди це рівнобедрений трикутник ABC, у якого $BC = \frac{10}{h}$,



$AC = \frac{10}{h}$, $AB = \frac{16}{h}$. Висота l трикутника ABC дорівнює $l = \sqrt{\frac{100}{h^2} - \frac{64}{h^2}} = \frac{6}{h}$. Тоді площа основи $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{h} \cdot \frac{16}{h} = \frac{48}{h^2} = 9$. Звідси $h^2 = \frac{16}{3}$, $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Тоді $SO = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$ і об'єм піраміди дорівнює $V = \frac{1}{3} 9 \cdot 2 = 6$.

5. Довести, що для всіх натуральних $n > 1$ виконується нерівність

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Вказівки до розв'язку.

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} =$$
$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n} = \frac{(1+n)\cdot n}{2(n^2+n)} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} =$$
$$= \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{n^2+n+1-1}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2(n^2+1)} < \frac{1}{2} + \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$